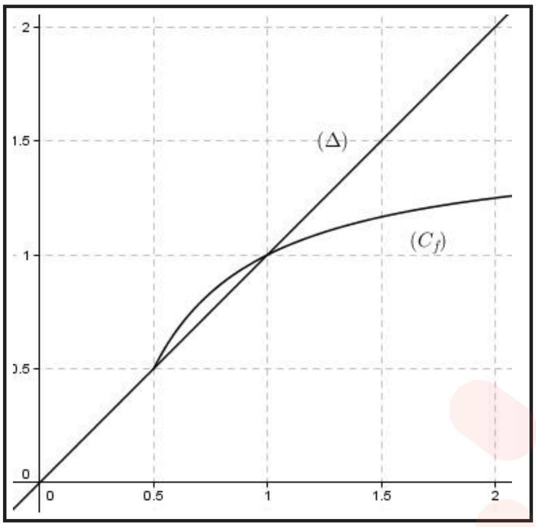
## الموضوع الثاني :

### التمرين الأول: (04 نقاط)




$f$ الدالة المعرّفة على المجال $I = [\frac{1}{2};+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و $(\Delta)$ مستقيم ذو المعادلة $y=x$. **(كما في الشكل المقابل )**

$(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة بحدّها الاول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) أنقل الشكل المقابل، مثّل دون حساب على محور الفواصل الحدود $U_0$ ، $U_1$ ، $U_2$ و $U_3$ مبرزا خطوط الإنشاء.

2) خمّن اتجاه تغيّر المتتالية $(U_n)$ وتقاربها.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_n > 1$.

4) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $(U_n)$ ، ماذا تستنتج؟.

5) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$.

6) $(V_n)$ متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية $(V_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) أكتب عبارة $U_n$ بدلالة $n$.

جـ) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ بحيث: $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \cdots\cdots + \frac{V_n - 1}{U_n}$.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

**من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدده مع التعليل:**

1) منحنى الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = 3x + \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

أ) $y = 3x$ ب) $y = 3x + 1$ جـ) $y = 3x + 2$

2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \displaystyle\int_1^{\lambda} x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$ ، علما أن الدالة: $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\left[\ln x - \dfrac{1}{2}\right]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x\ln x$ ، قيمة $\lambda$ التي من أجلها $A(\lambda) = \dfrac{1}{4}$ هي:

أ) $\lambda = e^{-1}$ ب) $\lambda = \sqrt{e}$ جـ) $\lambda = 2e$

3) المعادلة: $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما:

أ) $S = \{1; -5\}$ ب) $S = \{1; 5\}$ جـ) $S = \{-1; -5\}$

4) المتتالية العددية $(U_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 2 - 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما جـ) ليست رتيبة

**التمرين الثالث:** **(04 نقاط)**

وحدة إنتاجية يسيرها 20 عامل منهم 8 نساء و12 رجال ، من بينهم العامل " مراد ".

1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال. ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية:

$A$: " أعضاء اللجنة نساء". $B$: " اللجنة تضم على الأكثر إمرأة ". $C$: "اللجنة تضم على الأقل إمرأة ".

2) نعتبر المتغيّر العشوائي $X$ الذي يرفق بكل لجنة مشكلة ، عدد الرجال الموجودين فيها.

أ) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي $X$ ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P(X^2-2X\leqslant 0)$.

3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس، نائب و كاتب ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية :

$D$: "رئيس اللجنة من الرجال ". $E$: " رئيس ونائب اللجنة من نفس الجنس ".

$F$: "العامل " مراد " موجود في اللجنة ".

**التمرين الرابع:** **(08 نقاط)**

$I$. نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2x+1)e^{-x}+1$.

1) أحسب نهايتي الدالة $g$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0.74;-0.73[$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

$II$. $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل المنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\alpha+1+\dfrac{2}{2\alpha+1}$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$. ( تدور النتائج إلى $10^{-2}$ ).

5) بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف $\omega$ يطلب تعيين إحداثييها.

6) أنشئ كلاًّ من $(\Delta)$ و $(C_f)$. (يعطى $f(-1.65)\approx 0$ و $f(1.4)\approx 0$ ).

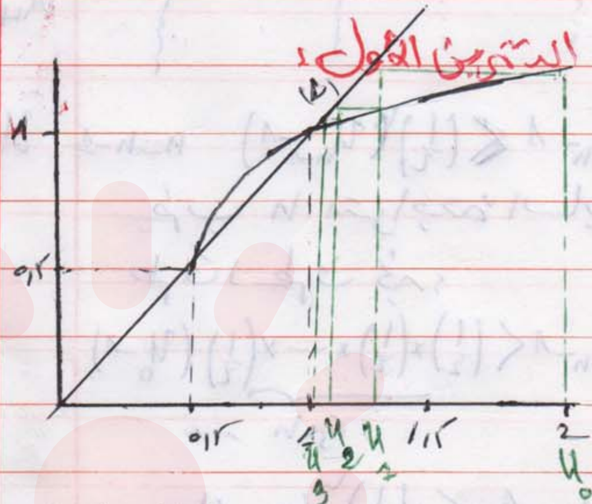
7) أ) عيّن العددين $a$ و $b$ حتّى تكون الدالة $H(x)=(ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h(x)=(-2x-3)e^{-x}$.

ب) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ (حيث $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما).

جـ) أحسب: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول:




1/ تمثيل الحدود $U_0 , U_1 , U_2 , U_3$

2/ تخمين اتجاه تغير $(U_n)$ وتقاربها

لدينا $U_0 > U_1 > U_2 > U_3$ مرتبة ترتيبا تنازليا ومنه $(U_n)$ متناقصة

ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع $(C_f)$ مع $(\Delta)$ أي $(x=1)$

3/ برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي: $U_n > 1$

نضع $P(n): U_n > 1$

$P(0): U_0 = 2 > 1$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

$U_n > 1$

وبما أن f متزايدة على المجال $]1 ; +\infty[$

$f(U_n) > f(1)$

$U_{n+1} > 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > 1$

4/ دراسة اتجاه تغير $(U_n)$، والاستنتاج؟

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n - 1}{2U_n} - U_n$$

$$= \frac{3U_n - 1 - 2U_n^2}{U_n}$$

$$= \frac{-2U_n^2 + 3U_n - 1}{U_n}$$

إشارة الفرق من إشارة $-2U_n^2+3U_n-1$

نضع $x = U_n$

$-2x^2 + 3x - 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad a=-2$$
$$= 3^2 - 4(-2)(-1) \qquad b=3$$
$$= 1 \qquad c=-1$$

$$x_1 = \frac{-3+1}{-2(2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{-2(2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+3x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

وبما أن $U_n > 1$ فإن $-2U_n^2+3U_n-1<0$ ومنه $(U_n)$ متناقصة على $\mathbb{N}$

* الاستنتاج:

$(U_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل $(U_n > 1)$ فهي متقاربة

5/أ) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}-1 < \frac{1}{2}(U_n-1)$

لدينا

$$U_{n+1}-1 = \frac{3U_n-1}{2U_n}-1$$

$$= \frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}$$

$$= \frac{U_n-1}{2U_n}$$

$$= \frac{1}{2U_n}(U_n-1)$$

ولدينا $U_n > 1$

أي $2U_n > 2$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2U_n} < \frac{1}{2}}$ ...(1)

لدينا $U_n-1>0$ بضرب طرفي (1) بالعدد $(U_n-1)$ نجد

$$\frac{1}{2U_n}(U_n-1) < \frac{1}{2}(U_n-1)$$

$$\boxed{U_{n+1}-1 < \frac{1}{2}(U_n-1)}$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من العلاقة السابقة و من أجل

$U_1-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_0-1)$ $n=0$

$U_2-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_1-1)$ $n=1$

$U_3-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_2-1)$ $n=2$

$\vdots$

$U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_{n-1}-1)$ $n=n-1$

بضرب n متراجحة السابقة طرف لطرف نجد

$$U_n-1 < \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\dots\times\left(\frac{1}{2}\right)}_{n \text{ مرة}}(U_0-1)$$

$$U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n(2-1)$$

$$\boxed{U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ملاحظة
يمكن برهان بتراجع على العلاقة $U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

/6 $V_n = \frac{U_n-1}{2U_n-1}$

أ/ بيان أن $(V_n)$ م هندسية

$V_0 = ?$ و $q = ?$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}$$

$$= \frac{\frac{3U_n-1}{2U_n}-1}{2\left(\frac{3U_n-1}{2U_n}\right)-1}$$

$$= \frac{\dfrac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}}{\dfrac{6U_n-2-2U_n}{2U_n}}$$

$$= \frac{U_n-1}{4U_n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}V_n$$

ومنه $(V_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{U_0-1}{2U_0-1} = \frac{2-1}{2(2)-1} = \frac{1}{3}$$

ب/ كتابة $U_n$ بدلالة $n$

* كتابة $V_n$ بدلالة $n$

$(V_n)$ م هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \quad \left| \begin{array}{l} p=0 \\ q=\frac{1}{2} \\ n=n \end{array} \right.$$

$$= V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

* لدينا $V_n = \dfrac{U_n-1}{2U_n-1}$

$$V_n(2U_n-1) = U_n-1$$

$$2V_nU_n - V_n = U_n-1$$

$$2V_nU_n - U_n = V_n-1$$

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$U_n = \frac{V_n-1}{2V_n-1}$$

$$\boxed{U_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}}$$

جـ/ حساب المجموع $S_n$

$$S_n = \frac{V_0-1}{U_0} + \frac{V_1-1}{U_1} + \dots + \frac{V_n-1}{U_n}$$

لدينا مما سبق

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$\boxed{2V_n-1 = \frac{V_n-1}{U_n}}$$

$$S_n = (2V_0-1)+(2V_1-1)+\dots+(2V_n-1)$$

$$= 2(\underbrace{V_0+V_1+\dots+V_n}_{\text{م ه } q=\frac{1}{2}}) - (\underbrace{1+1+\dots+1}_{(n+1)\text{ مرة}})$$

$$= 2\frac{V_0}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - (n+1)$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1}$$

## التمرين الثاني :

اختيار الإجابة الصحيحة مع التبرير

1/ منحنى الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}+3x$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$ معادلته

الجواب : جـ/ $y=3x+2$

التحليل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-3x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x+\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}-3x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}=2$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(3x+2)=0$$

ومنه $y=3x+2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $(+\infty)$

2/ $A(\lambda)=\int_1^\lambda x\ln x\,dx$ ، $\lambda>1$

قيمة $\lambda$ حتى يكون $A(\lambda)=\frac{1}{4}$ هي

الجواب : ب/ $\lambda=\sqrt{e}$

التحليل :

$$A(\lambda)=\int_1^\lambda x\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^\lambda$$

$$=\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

حتى يكون $A(\lambda)=\frac{1}{4}$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\cancel{\frac{1}{4}}=\cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\frac{\lambda^2}{2}=0$

$\lambda^2=0$

$\lambda=0$ مستحيل لأن $\lambda>1$

$\ln\lambda-\frac{1}{2}=0$

$\ln\lambda=\frac{1}{2}$

$\boxed{\lambda=e^{\frac{1}{2}}}$

ومنه $\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$

3/ المعادلة $\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$ تقبل حلين هما

الجواب : ب/ $S=\{1,5\}$

التحليل :

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

من معرفة على $\mathbb{R}^*$ لأن

$$11x^2-6x+5>0\ ,\ x^2>0$$

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

$$\frac{\ln(11x^2-6x+5)}{\ln 10}=\frac{\ln x^2}{\ln 10}+1$$

$$\ln(11x^2-6x+5)=\ln x^2+\ln 10$$

$$\ln(11x^2-6x+5)=\ln 10x^2$$

$$11x^2-6x+5=10x^2$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \quad \Big| \; a=1$$
$$=36-4(1)(5) \quad \Big| \; b=-6$$
$$=16 \quad \Big| \; c=5$$

$$x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ومنه $S=\{1,5\}$

4/ $(U_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من مسألة :

الجواب : P/ متزايدة تماما

التحليل :

$$U_{n+1}-U_n=\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$=-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(-\frac{1}{4}+1\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n>0$$

ومنه $(U_n)$ متزايدة تماما

## التمرين الثالث :

عدد الرجال : 12
عدد النساء : 08

عدد العمال : $12+8=20$

التجربة تشكيل لجنة من 03 عمال

المهام غير مذكورة

طريقة العد : توفيقة $C_{20}^3=1140$

1/ حساب احتمال الحوادث التالية

"A" أعضاء اللجنة نساء

$$P(A)=\frac{C_8^3}{C_{20}^3}=\frac{14}{285}$$

"B" اللجنة تضم امرأة على الأكثر

$$P(B)=\frac{C_8^1\times C_{12}^2+C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{187}{285}$$

"C" اللجنة تضم امرأة على الأقل

$$P(C)=\frac{C_8^1\times C_{12}^2+C_8^2\times C_{12}^1+C_8^3}{C_{20}^3}$$

$$=\frac{72}{95}$$

2/ ليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل لجنة عدد الرجال المتواجدين في اللجنة

4/ قانون الاحتمال وحساب الأمل الرياضياتي.

قيم $X$ هي

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{14}{285}$ | $\frac{84}{285}$ | $\frac{132}{285}$ | $\frac{55}{285}$ | 1 |
| $x_i p_i$ | 0 | $\frac{84}{285}$ | $\frac{264}{285}$ | $\frac{165}{285}$ | |

$$P(X=0) = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285}$$

$$P(X=1) = \frac{C_{12}^1 \times C_8^2}{C_{20}^3} = \frac{28}{95} = \frac{84}{285}$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2 \times C_8^1}{C_{20}^3} = \frac{44}{95} = \frac{132}{285}$$

$$P(X=3) = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{11}{57} = \frac{55}{285}$$

$$E(X) = \Sigma x_i p_i = \frac{9}{5}$$

3/ التجربة ، 20 عمال

المهام : رئيس ، نائب ، كاتب

طريقة الاختيار ترتيبة $A_{20}^3 = 6840$

حساب احتمال الحوادث التالية

"D" رئيس اللجنة من الرجال

$$P(D) = \frac{A_{12}^1 \times A_{19}^2}{A_{20}^3} = \frac{3}{5}$$

"E" رئيس اللجنة ونائبه من نفس الجنس

$$P(F) = \frac{A_{12}^2 \times A_{18}^1 + A_8^2 \times A_{18}^1}{A_{20}^3} = \frac{3384}{6840} = \frac{47}{95}$$

"F" الحامل "مراد" في اللجنة

$$P(F) = \frac{3 \times A_1^1 \times A_{19}^2}{A_{20}^3} = \frac{1026}{6840} = \frac{3}{20}$$

## التمرين الرابع :

I $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$ ، $D_g = \mathbb{R}$

1/ حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

• $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x+1)e^{-x} + 1 = -\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x+1)e^{-x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} + 1$

$= 1$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

2/ دراسة اتجاه تغير $g$ وتشكيل جدول تغيراتها

$g$ دالة ق ا ش على $\mathbb{R}$ و

$$g'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1)$$

$$= e^{-x}(2 - (2x+1))$$

$$= e^{-x}(1 - 2x)$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $1-2x$

لأن $e^{-x}>0$

$1-2x=0$ أي $2x=1$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

ومنه $g$ متناقصة تماما على $]\frac{1}{2};+\infty[$

ومتزايدة تماما على $]-\infty;\frac{1}{2}]$

* جدول تغيرات $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2}{\sqrt{e}}+1$ | $\searrow$ | $0$ |

$g(\frac{1}{2})=2e^{-\frac{1}{2}}+1=\frac{2}{\sqrt{e}}+1$

3/ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ حيث

$-0,74<\alpha<-0,73$

لدينا $g$ دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0,74;-0,73[$

$g(-0,74)=$

$g(-0,73)=$

و $g(-0,74)\times g(-0,73)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد $\alpha$ وحيد بحيث $-0,74<\alpha<-0,73$ يحقق $g(\alpha)=0$

4/ استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة $g$ ومن $g(\alpha)=0$ نستنتج

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

II

$f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$

1/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\frac{-2x-3}{x}e^{-x}+1\right]$

$=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^{x}}-\frac{3}{e^{x}}+x$

$=+\infty$

2/ أ/ بيان أن $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}+x-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2x}{e^{x}}-\frac{3}{e^{x}}=0$$

ومنه $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$

$$f(x)-y=(-2x-3)e^{-x}$$

إشارة الفرق من إشارة $(-2x-3)$

لأن $e^{-x}>0$

$-2x-3=0$ أي $-2x=3$

$x=-\frac{3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)-y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | |

3/ أ/ بيان أن $f'(x)=g(x)$

لدينا $f$ قابلة للاشتقاق على $R$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=-2e^{-x}-e^{-x}(-2x-3)+1$$

$$=e^{-x}(-2-(-2x-3))+1$$

$$=(2x+1)e^{-x}+1$$

$$=g(x)$$

جـ/ استنتاج اتجاه تغير $f$ وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x)=g(x)$

إذا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

ومنه $f$ متزايدة تماما على المجال $[\alpha,+\infty[$

ومتناقصة على المجال $]-\infty,\alpha]$

* جدول التغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4/ بيان أن $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{2\alpha+1}$

نثبت أن

$$f(\alpha)-(\alpha+1)-\frac{2}{2\alpha+1}=0$$

$$f(\alpha)-\alpha-1-\frac{2}{2\alpha+1}=$$

$$=(-2\alpha-3)e^{-\alpha}+\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha}-1-\frac{2}{2\alpha+1}$$

$$=(-2\alpha-3)e^{-\alpha}-\frac{(2\alpha+1)+2}{2\alpha+1}$$

$$=\frac{-(2\alpha+3)(2\alpha+1)e^{-\alpha}-(2\alpha+3)}{2\alpha+1}$$

$$=\frac{-(2\alpha+3)\left[(2\alpha+1)e^{-\alpha}+1\right]}{2\alpha+1}$$

$$=\frac{-(2\alpha+3)\,g(\alpha)}{2\alpha+1}=0$$

حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$$-0{,}74<\alpha<-0{,}73$$

$$\boxed{0{,}26<\alpha+1<0{,}27}\ \text{—}(1)$$

$$-1{,}48<2\alpha<-1{,}46$$

$$-0{,}48<2\alpha+1<-0{,}46$$

$$-2{,}08>\frac{1}{2\alpha+1}>-2{,}17$$

$$-4{,}16>\frac{2}{2\alpha+1}>-4{,}34$$

$$\boxed{-4{,}34<\frac{2}{2\alpha+1}<-4{,}16}$$

بجمع (1) و(2) طرف لطرف نجد

$$-4{,}08<f(\alpha)<-3{,}89$$

15/ تبيان أن $(C_g)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

لدينا $f'$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$f''(x)=g'(x)$$

من الجزء I

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)=g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

ومنه $f''$ تنعدم عند $x=\frac{1}{2}$ معيرة إشارتها ومنه $(C_g)$ يقبل نقطة انعطاف هي

$$\omega\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=(-1-3)e^{-\frac{1}{2}}=\frac{-4}{\sqrt{e}}$$

16/ إنشاء $(C_g)$ و $(\Delta)$ (آخر الموضوع)

17/ تعيين $a$ و $b$ حتى تكون $H$ دالة أصلية لـ $h$

$$H(x)=(ax+b)e^{-x}$$

$$h(x)=(-2x-3)e^{-x}$$

$$H'(x)=h(x)$$

$$H'(x)=a\,e^{-x}-(ax+b)e^{-x}$$

$$=(-ax-b+a)e^{-x}$$

بالمطابقة مع الدالة $h$ نجد

$-a = -2 \Rightarrow a = 2$

$-b + a = -3 \qquad b = 3 + a = 5$

$$H(x) = (2x+5)\,e^{-x}$$

2/ ب/ حساب المساحة $A(\lambda)$

المحدد بـ $(C_f)$ والمستقيمات

$y = x$ , $x = \lambda$ , $x = 0$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} y - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\lambda} \cancel{x} - (-2x-3)e^{-x} - \cancel{x}\,dx$$

$$= \left[-H(x)\right]_0^{\lambda}$$

$$= -H(\lambda) + H(0)$$

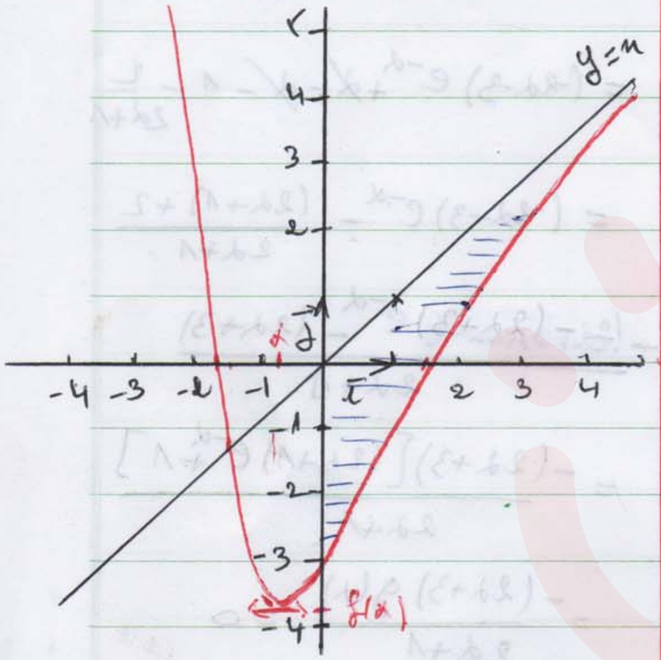
$$= -(2\lambda+5)e^{-\lambda} + 5 \text{ u.a}$$

حساب $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} -(2\lambda+5)e^{-\lambda} + 5$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{-2\lambda}{e^{\lambda}} - \frac{5}{e^{\lambda}} + 5$$

$$= 5$$




س 03 السؤال ②

ب/ $P(X^2 - 2X \leq 0)$

$X^2 - 2X = 0$

$X(X-2) = 0$

$X - 2 = 0 \quad | \quad X = 0$

$X = 2$

| $X$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X^2-2X$ | + | 0 | − | 0 | + |

$0 \leq X \leq 2$ قيم $X$ من

$P(X^2 - 2X \leq 0) = P(0 \leq X \leq 2)$

$= P(X=0) + P(X=1)$

$+ P(X=2)$

$= \frac{230}{285}$